■ホーム ■カテゴリー分類 ■解法のヒント ■公式集 ■索引 ■数I ■数A ■数II ■数B ■数III ■数C ■入試問題
■三角関数 ■微分 ■積分 ■複素数 ■関数 ■幾何 ■ベクトル ■確率 ■数列 ■行列 ■指数/対数 ■数と式 ■その他
数学知識構造の全体を見るにはこのグラフ図を， 関連するページを見るにはこのグラフ図を利用してください．
応用分野： 2直線のなす角，

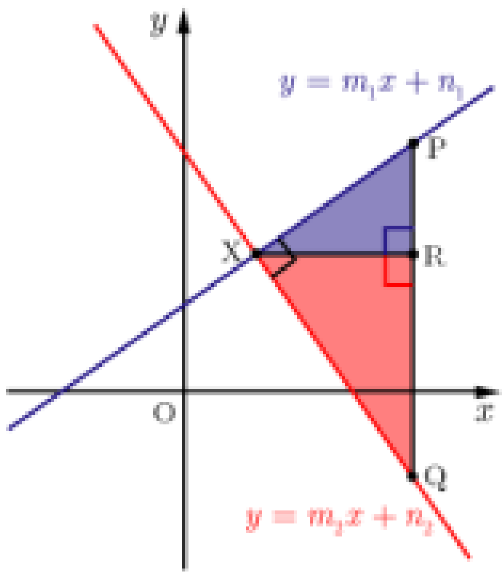
2直線が垂直に交わる条件

2つの直線の傾きを m_1 ， m_2 とすると，垂直に交わる（直交する）ための条件は，

$$m_1 m_2 = -1$$

である．

参考ページ：2直線のなす角



■証明

$m_1>0, m_2<0$ とする．2つの直線の交点をX，交点Xの右側に y 軸に平行な直線を引き，傾きが m_1 の直線との交点をP，傾きが m_2 の直線との交点をQとする．交点Xを通り， x 軸に平行な直線を引き，直線PQとの交点をRとする．以上のように，点X，P，Q，Rをとると△XRP，△XRQは直角三角形になる．

直線の傾きの定義より

$$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{XR}} = m_1 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{XR}} = -m_2 \quad \cdots\cdots(2)$$

△XRPが直角三角形より，三平方の定理が成り立つので，

$$\mathrm{XP}^2 = \mathrm{XR}^2 + \mathrm{PR}^2$$

$$= \mathrm{XR}^2 + (\mathrm{XR}\cdot m_1)^2 \quad (\because\ (1))$$

$$= \mathrm{XR}^2(1+m_1{}^2) \quad \cdots\cdots(3)$$

△XRQが直角三角形より，三平方の定理が成り立つので，

$$\mathrm{XQ}^2 = \mathrm{XR}^2 + \mathrm{QR}^2$$

$$= \mathrm{XR}^2 + (-\mathrm{XR}\cdot m_2)^2 \quad (\because\ (2))$$

$$= \mathrm{XR}^2(1+m_2{}^2) \quad \cdots\cdots(4)$$

2つの直線が垂直に交わると，∠PXQ=90°となり△PXQは直角三角形になる．よって，三平方の定理より，

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{XP}^2+\mathrm{XQ}^2$$

$$(\mathrm{PR}+\mathrm{QR})^2=\mathrm{XR}^2(1+m_1{}^2)+\mathrm{XR}^2(1+m_2{}^2)$$ （∵（3），（4））

$$(\mathrm{XR}\cdot m_1-\mathrm{XR}\cdot m_2)^2=\mathrm{XR}^2(1+m_1{}^2)+\mathrm{XR}^2(1+m_2{}^2)$$ （∵（1），（2））

$$\mathrm{XR}^2(m_1-m_2)^2=\mathrm{XR}^2(1+m_1{}^2)+\mathrm{XR}^2(1+m_2{}^2)$$

$$(m_1-m_2)^2=(1+m_1{}^2)+(1+m_2{}^2)$$

$$m_1{}^2-2m_1m_2+m_2{}^2=2+m_1{}^2+m_2{}^2$$
$$-2m_1m_2=2$$
$$m_1m_2=-1$$

2直線が垂直に交わると， $m_1m_2=-1$ である.

一方， $m_1m_2=-1$ ならば，

$$\begin{aligned}&\mathrm{PQ}^2-(\mathrm{XP}^2+\mathrm{XQ}^2)\\&=(\mathrm{PR}+\mathrm{QR})^2-\mathrm{XP}^2-\mathrm{XQ}^2\\&=(\mathrm{XR}\cdot m_1-\mathrm{XR}\cdot m_2)^2-\mathrm{XR}^2(1+m_1{}^2)-\mathrm{XR}^2(1+m_2{}^2)\end{aligned}$$ （∵（1），（2），（3），（4））

$$\begin{aligned}&=\mathrm{XR}^2(m_1-m_2)^2-\mathrm{XR}^2(1+m_1{}^2)-\mathrm{XR}^2(1+m_2{}^2)\\&=(m_1-m_2)^2-(1+m_1{}^2)-(1+m_2{}^2)\\&=m_1{}^2-2m_1m_2+m_2{}^2-1-m_1{}^2-1-m_2{}^2\\&=-2m_1m_2-2\\&=0\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{XP}^2+\mathrm{XQ}^2$$

となり，△PXQにおいて三平方の定理がなりたち，△PXQは直角三角形である．よって，

∠PXQ=90°

すなわち，2直線は垂直に交わる.

以上より，証明された.

ホーム>>カテゴリー別分類>>幾何>>2直線が垂直に交わる条件

最終更新日 2016年3月3日

[ページトップ]

google translate (English version)